О ПОЛИГОНАХ НАД СИНГУЛЯРНЫМИ ПОЛУГРУППАМИ

И.Б. Кожухов, А.Р. Халиуллина

Национальный исследовательский университет МИЭТ, 124498, Москва, Россия
kozhuhov_i_b@mail.ru, haliullinaar@gmail.com

Полигон (*автомат*) X над полугруппой S (см. [1]) – это множество X, на котором действует полугруппа S, т.е. определено отображение $X \times S \to X$, $(x, s) \mapsto xs$, удовлетворяющее условию $x(st) = (xs)t$ при всех $x \in X$, $s, t \in S$. Для полугрупп относительно несложного строения все полигоны над ними могут быть полностью описаны. Так, в [2] были описаны в теоретико-групповых и теоретико-множественных терминах полигоны над вполне 0-простыми полугруппами $\mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ и вполне простыми полугруппами $\mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ (здесь G – группа, I и Λ – множества, P – сэндвич-матрица). Вполне простыми полугруппами являются, в частности, *полугруппы левых / правых нулей*, а также их прямые произведения – *прямоугольные связки* (для получения прямоугольной связки нужно взять в качестве G группу из одного элемента, а в качестве сэндвич-матрицы P матрицу из единиц). Прямоугольная связка имеет ряд альтернативных определений: 1) полугруппа, удовлетворяющая тождествам $x^2 = x$, $xyz = xz$; 2) полугруппа с тождеством $xyx = x$; 3) полугруппа, удовлетворяющая квазитождеству $xy = yx \to x = y$. *Сингулярной полугруппой* мы называем полугруппу левых или правых нулей.

Все конгруэнции произвольного полигона над полугруппой левых нулей были описаны в [3], правых нулей – в [4].

Полигон над полугруппой может быть рассмотрен как унарная алгебра, т.е. универсальная алгебра, у которой все операции унарны. Напомним, что универсальная алгебра называется *подпрямо неразложимой*, если она не разлагается в нетривиальное подпрямое произведение алгебр. Интерес к подпрямо неразложимым универсальным алгебрам объясняется хорошо известной теоремой Биркгофа, утверждающей, что всякая алгебра является подпрямым произведением подпрямо неразложимых алгебр. Известно, что нетривиальная подпрямо неразложимая алгебра – это в точности алгебра, решётка конгруэнций которой имеет единственный атом. Подпрямо неразложимые полигоны над сингулярными полугруппами, а также над прямоугольными связками были охарактеризованы в [5].

Полигон A называется *инъективным*, если для любого инъективного гомоморфизма $\alpha : X \to Y$ полигонов и любого гомоморфизма $\varphi : X \to A$ существует гомоморфизм $\psi : Y \to A$ такой, что $\psi\alpha = \varphi$. *Инъективная оболочка* полигона B – это минимальный инъективный надполигон полигона B. Полигон A называется *проективным*, если для любого сюръективного гомоморфизма $\alpha : X \to Y$ полигонов и любого гомоморфизма $\varphi : A \to Y$ существует гомоморфизм $\psi : A \to X$ такой, что $\alpha\psi = \varphi$. *Проективным накрытием* полигона B называется проективный полигон P, для которого существует сюръективный гомоморфизм $\theta : P \to B$ такой, что для любого собственного подполигона $P' \subset P$ ограничение $\theta|_{P'} : P' \to B$ не является сюръективным. Хорошо известно, что, как и в случае модулей над кольцами, инъективная оболочка существует у каждого полигона, а проективное накрытие не у каждого. Также известно необходимое условие инъективности полигона – это наличие у него нулевого элемента (при этом единственности нуля может не быть). Полигон X называется *сепарабельным*, если для любых $x, y \in X$ таких, что $x \neq y$, существует $s \in S \setminus \{1\}$ такое, что $x \neq y$. В работе [6] для сепарабельных полигонов над полугруппой левых нулей были найдены условия инъективности полигона и построена инъективная оболочка полигона. В [7] нахождение условий инъективности и построение инъективной оболочки полигона над полугруппой левых нулей было осуществлено без предположения сепарабельности. Далее, в [7] было доказано, что наличие нуля является необходимым и достаточным условием инъективности полигонов над группами и полигонов над полугруппами правых нулей. Поэтому построение инъективной оболочки неинъективного полигона над группой или полугруппой правых нулей состоит в присоединении к этому полигону внешним образом нуля. Кроме того, в [7] были получены условия проективности полигонов над группами, полугруппами правых и полугруппами левых нулей и построены проективные накрытия полигонов. В частности, оказалось, что проективное накрытие существует у любого полигона над такими полугруппами. Одним из результатов работы [7] является тот факт, что над полугруппой левых нулей проективными полигонами являются в точности копроизведения (т.е. дизъюнктные объединения) свободных полигонов и полигонов, состоящих из нулей.

Пусть X – полигон над полугруппой S. Будем говорить, что полугруппа S действует на X *эффективно*, если

$$(\forall\ x \in X\ xs = xt) \Rightarrow s = t$$

для всех $s, t \in S$.

В работе [3] были описаны полигоны X над сингулярными полугруппами S, у которых решётка конгруэнций $\mathrm{Con}X$ модулярна, или дистрибутивна, или является цепью. Отметим, что в случае модулярности решётки конгруэнций $\mathrm{Con}X$ полигона X над полугруппой левых нулей S максимальный порядок полигона X равен 5, а максимальный порядок полугруппы S, если она действует эффективно на X, равен 9. Максимальный порядок решётки конгруэнций равен 13. В случае полугруппы правых нулей S порядок модулярной решётки конгруэнций не превышает 200, максимальный порядок полигона X с модулярной решёткой конгруэнций равен 9, максимальный порядок полугруппы S, действующей эффективно на X, равен 27. Работа по описанию полигонов над прямоугольными связками, имеющих модулярную решётку конгруэнций, авторами не завершена, но полученные ими необходимые условия показывают, что порядок полигона X при этом не превышает 9.

Литература

1. Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V. *Monoids, acts and categories.* W. de Gruyter, N.Y. – Berlin, 2000.

2. Avdeyev A. Yu., Kozhukhov I. B. *Acts over completely 0-simple semigroups* // Acta Cybernetica. 2000. V. 14. №4. P. 523–531.

3. Халиуллина А. Р. *Условия модулярности решётки конгруэнций полигона над полугруппой правых и левых нулей* // Дальневост. матем. журнал. 2015. Т. 15. №1. С. 102–120.

4. Халиуллина А. Р. *Конгруэнции полигонов над полугруппами правых нулей* // Чебыш. сб. 2015. Т. 14. №3. С. 142–146.

5. Кожухов И. Б., Халиуллина А. Р. *Характеризация подпрямо неразложимых полигонов* // Прикл. дискр. матем. 2015. №1. С. 5–16.

6. Moghaddasi G. *On injective and subdirectly irreducible S-acts over left zero semigroups* // Turk. J. Math. 2012. V. 36. P. 359–365.

7. Кожухов И. Б., Халиуллина А. Р. *Инъективность и проективность полигонов над сингулярными полугруппами* // Электронные информационные системы. 2014. Т. 2. №2. С. 45–56.